Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I

# HOJA DE PROBLEMAS: TAYLOR, MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES Y DERIVACIÓN IMPLÍCITA

1. **El problema de Steiner.** Se pretende construir un aeropuerto cercano a tres ciudades. El problema consiste en encontrar la localización óptima del aeropuerto en el sentido de que éste esté lo más cercano posible a las tres ciudades. Supongamos que las coordenadas que nos dan la localización de las tres ciudades son $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ y $(x_3, y_3)$ y denotemos por $(x, y)$ las coordenadas del aeropuerto. La distancia de la primera ciudad al aeropuerto viene dada por $d_1 = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$. De igual manera las distancias de las otras dos ciudades al aeropuerto son $d_2 = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$ y $d_3 = \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}$. Por tanto, el problema de Steiner consiste en encontrar el mínimo de la función

$$f(x, y) = d_1 + d_2 + d_3 \tag{1}$$

Resolveremos más adelante este problema con la ayuda del ordenador. De momento, nos ocuparemos de una versión más sencilla de este problema donde la función a minimizar será la suma de las distancias al cuadrado. En concreto, calcula el mínimo de la función

$$g(x, y) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2.$$

**Solución:** *El centroide del triángulo que tiene por vértices $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ y $(x_3, y_3)$, es decir*

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

2. **Distancia de un punto a un conjunto de $\mathbb{R}^n$.** Dado un conjunto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $x = (x_1, \cdots, x_n)$ que no pertenezca a $\Omega$, se define la distancia de $x$ a $\Omega$ como la menor de las distancias posibles entre $x$ y cualquier punto de $\Omega$. Recordemos que la distancia (euclídea) entre los puntos $x$ e $y$ se define como

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \cdots + (y_n-x_n)^2}.$$

En $\mathbb{R}^2$ consideremos el punto $P = (1, 2)$ y el conjunto

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2+2)^2 - 1\right\}.$$

Calcula la distancia de $P$ a $\Omega$.

3. **Ajuste por mínimos cuadrados.** El ajuste por mínimos cuadrados de los cuatro puntos $(-1, 4)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ a una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ requiere resolver el problema siguiente de programación no lineal: Minimizar $f(a, b, c)$, donde

$$f(a, b, c) = (4 - (a - b + c))^2 + (1 - c)^2 + (1 - (a + b + c))^2 + (1 + (a + b + c))^2$$

Resuelve este problema.

4. **Algunos problemas de optimización geométricos.** Calcula las dimensiones del cubo de volumen máximo que se puede incluir en una esfera de radio 1.
**Solución:** *Anchura = Altura = Profundidad* $= \frac{2}{\sqrt{3}}$

5. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que está contenido en la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2.$$



6. Se dispone de una cantidad fija de material para fabricar una caja rectangular. Calcula las dimensiones de la caja para que su volumen sea el máximo posible.

7. **Un problema de calor en régimen estacionario.** Consideremos una placa circular que ocupa la región bidimensional

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Supongamos que la distribución de temperaturas (en régimen estacionario, es decir, la temperatura no varía con el tiempo) de la placa está dada por la función

$$T(x, y) = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{4}.$$

¿Cuál es el punto de la placa que está más caliente ? ¿Y el más frío ?
Comprueba que efectivamente $T(x, y)$ es solución de la ecuación de calor estacionaria

$$\begin{cases} -\nabla^2 T = 1 & \text{en} \quad \Omega \\ T = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ denota el Laplaciano de $T$ y $\partial\Omega$ es la frontera de $\Omega$, esto es, la circunferencia de radio 1.

8. **Combinación óptima de las variables de decisión comerciales en una empresa.** Según el modelo de Lambin [2, p.597], se pretende analizar, en el corto plazo, qué parte del presupuesto de una empresa se ha de dedicar a publicidad, qué parte a gasto en equipo de ventas y qué nivel de precios se ha de fijar en sus productos, el beneficio total puede expresarse en la forma

$$B(P, A, EV) = PQ(P, A, EV) - C_V^* Q(P, A, EV) - A - EV - C_F$$

donde las variables de optimización son el precio $P$, los gastos en publicidad $A$ y los gastos en el equipo de vendedores $EV$, $C_F$ es una constante que representa los costes fijos, $C_V^*$ representa los costes variables y $Q(P, A, EV)$ es la cantidad de ventas, que depende del precio, la publicidad y el equipo de vendedores. En el corto plazo se puede suponer que $C_V^*$ = constante. Teniendo en cuenta que la elasticidad de la demanda respecto a precios, publicidad y vendedores se define como

$$e_{Q,P} = \frac{\partial Q}{\partial P}\frac{P}{Q}, \quad e_{Q,A} = \frac{\partial Q}{\partial A}\frac{A}{Q}, \quad e_{Q,EV} = \frac{\partial Q}{\partial EV}\frac{EV}{Q},$$

comprueba que en el óptimo se satisface la relación

$$-e_{Q,P} = \frac{PQ}{A} e_{Q,A} = \frac{PQ}{EV} e_{Q,EV} = \frac{P}{P - C_V^*}.$$

9. Resuelve el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \\ \text{sujeto a} & \\ & a \cdot x = c \end{cases}$$

donde $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ es un vector no nulo de $n$ componentes, $c$ es una constante y $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

**Solución:** $x = \frac{c}{\|a\|^2} a$

10. Utiliza la derivación implícita para calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ en un punto genérico $(x_0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$.
**Solución:**

$$r(x) = -\frac{x_0}{y_0} x + \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0}.$$

11. La ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - z = 51$$

define a la variable $z$ como función implícita de $x$ e $y$ en un entorno del punto $(6, -3)$ en el cual $z = z(x, y)$ puede tomar los valores $z = 3$ y $z = -2$. Para $z = -2$, calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z(x, y)$ en el punto $(3, -2)$. Calcula la también el polinomio de Taylor de orden 2 de $z(x, y)$ en el punto $(3, -2)$.

12. Comprueba que los circunferencias de ecuaciones $(x - 2)^2 + y^2 = 2$ y $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ son tangentes en el punto $(1, 1)$.

13. Una empresa considera que la función de demanda $D$ del bien que produce, dependiendo de la cantidad producida $Q$, del precio del bien $P$, y de la renta disponible de los individuos $R$ puede expresarse como

$$D(Q, P, R) = \log \frac{10Q}{P} + \frac{1}{100} R$$

En el momento actual, los valores de las variables son $Q = 10$, $P = 2$ y $R = 200$. Un estudio de mercado indica una disminución en la renta disponible de los individuos. Si se pretende dejar constante la producción, ¿cómo deberá variar el precio del bien en función de la renta para mantener el nivel de demanda ?.

14. Una empresa produce un producto a partir de dos materias primas. La relación entre la cantidad del bien producida $Q$ y las cantidades de materias empleadas $(x, y)$ es de la forma

$$\log Q - \frac{x^2 y}{Q} + 1 = 0, \quad Q, x, y > 0.$$

Teniendo en cuenta que la productividad marginal respecto a una materia prima se define como la tasa de variación de la cantidad de bien producido cuando sufre variaciones en la cantidad de la correspondiente materia prima, calcula las productividades marginales respecto a $x$ e $y$ para los valores $x = y = Q = 1$.

15. Calcula el polinomio de Taylor de grado dos de las funciones que se indican a continuación:

(a) $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$ en el punto $(0, 0)$.
(b) $f(x, y) = (x^2 - 3x)e^{y^2}$ en el punto $(0, 0)$.
(c) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} - ze^x$ en el punto $(1, 1, 0)$.

## Referencias

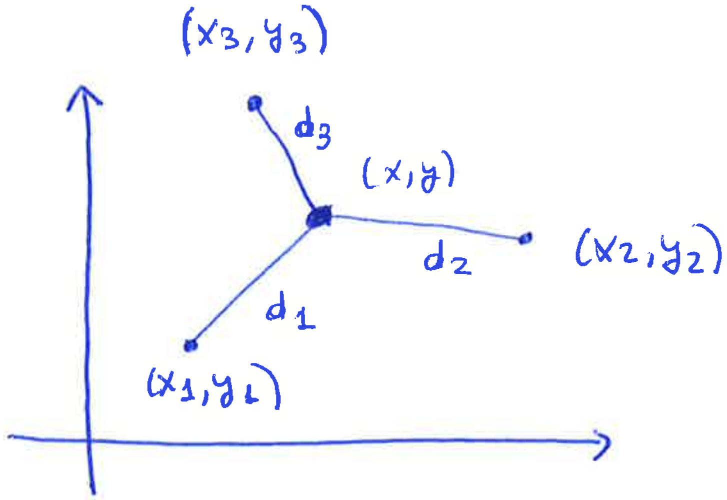

[1] E. Bueno, I. Cruz, J. J. Durán, Economía de la Empresa, Ediciones Pirámide, 2002.

[2] E. Steiner, The Chemistry Maths book, Oxford University Press, 1996.

[3] G. Strang, Calculus, Wellesley- Cambridge Press, 1991.

# HOJA DE PROBLEMAS.

## ① Problema de Steiner




$$d_1 = +\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$d_2 = +\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

$$d_3 = +\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}$$

$$g(x,y) = d_1^2+d_2^2+d_3^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 + (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 + (x-x_3)^2+(y-y_3)^2$$

$$\left\{ \text{Minimizar} \quad g(x,y) \right.$$

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = \Big(2(x-x_1)+2(x-x_2)+2(x-x_3),\; 2(y-y_1)+2(y-y_2)+2(y-y_3)\Big)$$

Condición necesaria de optimalidad:

$$2(x-x_1)+2(x-x_2)+2(x-x_3) = 0 \to x = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$$

$$2(y-y_1)+2(y-y_2)+2(y-y_3) = 0 \to y = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

obviamente, este punto es un mínimo pues $g(x,y)$ es cuadrática. En cualquier caso, vamos a comprobarlo a través de la matriz Hessiana:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(x-x_1) + 2(x-x_2) + 2(x-x_3) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2+2+2 = 6 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-y_1) + 2(y-y_2) + 2(y-y_3) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2+2+2 = 6 \end{cases}$$

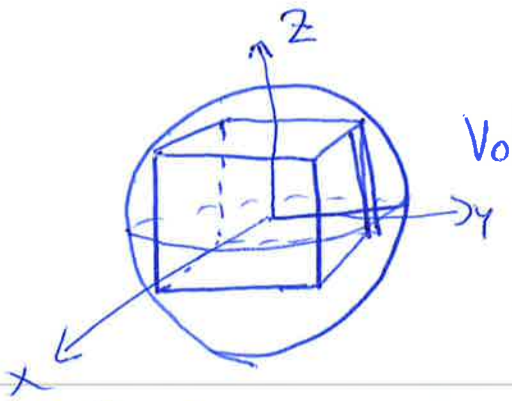
$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 6 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \\ y = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3) \end{cases} \quad \text{mínimo.}$$

4




Volumen de un cubo de dimensiones ~~2x~~

$2x,\ 2y,\ 2z$

$V = 2\ xyz$

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & V(x,y,z) = xyz \\ \text{sujeto a} & x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

Sea $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$$\nabla V = (yz,\ xz,\ xy)$$

$$\nabla h = (2x,\ 2y,\ 2z) \leftarrow \lambda$$

---

$$\nabla V + \lambda \nabla h = (yz + 2x\lambda,\ xz+2y\lambda,\ xy+2z\lambda)$$

Condición necesaria de optimalidad

$$\left.\begin{array}{l} yz+2x\lambda = 0 \\ xz+2y\lambda = 0 \\ xy+2z\lambda = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} xyz+2x^2\lambda = 0 \\ xyz+2y^2\lambda = 0 \\ xyz+2z^2\lambda = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \} \ 2x^2\lambda = 2y^2\lambda \\ \} \ 2y^2\lambda = 2z^2\lambda \end{array}$$

$$(x^2-y^2)\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \text{ ó } x^2=y^2$$

$$(y^2-z^2)\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \text{ ó } y^2=z^2$$

Si $\lambda = 0 \rightarrow yz = 0$ NO.

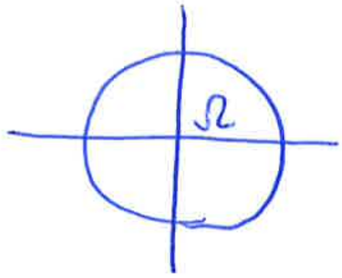
Por tanto, $\lambda \neq 0 \Rightarrow x^2=y^2=z^2$.

Sustituyendo en la última ecuación

$$3x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = y = z$$

Solución $\boxed{x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

(7) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$




$$T(x,y) = \frac{1-(x^2+y^2)}{4}$$

$$\begin{cases} \text{Minimizar (Maximizar)} & T(x,y) = \dfrac{1-(x^2+y^2)}{4} \\ \text{sujeto a} & \\ & h(x,y) = x^2+y^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

Los puntos de máxima y mínima temperatura pueden estar en el interior de la placa circular o sobre su borde. Por ello, estudiamos los dos problemas siguientes:

$$(P1) \begin{cases} \text{Minimizar (Maximizar)} & T(x,y) = \dfrac{1-(x^2+y^2)}{4} \end{cases}$$

$$(P2) \begin{cases} \text{Minimizar (Maximizar)} & T(x,y) = \dfrac{1-(x^2+y^2)}{4} \\ \text{sujeto a} & \\ & h(x,y) = x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

(P1) $\nabla T = \left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}\right) = (0,0) \rightarrow x = y = 0.$

$$T(0,0) = \frac{1}{4}.$$

(P2) $\nabla h = (2x, 2y)$

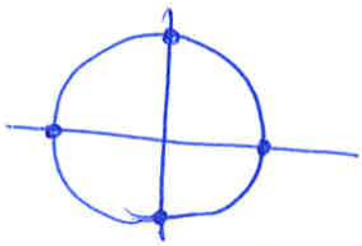
$$\nabla T + \lambda \nabla h = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{x}{2} + 2x\lambda = 0 \\ -\frac{y}{2} + 2y\lambda = 0 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} -x + 4x\lambda = 0 \\ -y + 4y\lambda = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (-1+4\lambda)\,x = 0 \\ (-1+4\lambda)\,y = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow x = 0 \\ \quad ó \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Si $x = 0$, como $x^2+y^2=1 \rightarrow y = \pm 1$.

Si $y=0$ " " $\rightarrow x = \pm 1$

Si $x \neq 0$, $y \neq 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \rightarrow x^2+y^2=1$;



Temperatura en la frontera $x^2+y^2=1$:

$$T(x,y) = \frac{1-(x^2+y^2)}{4} = \frac{1-1}{4} = 0.$$

P1 = (0,0) Máximo de temperatura

Mínimo de temperatura = todos los puntos de la ~~fr~~ frontera, es decir, los puntos de la circunferencia de centro (0,0) y radio 1.

$\rightarrow$ Comprobamos que es un máximo a través de la matriz Hessiana:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{x}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right.$$

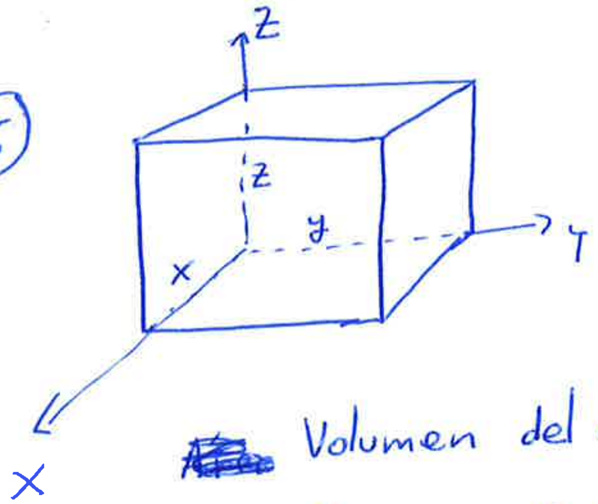
$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{y}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$HT(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} > 0 \rightarrow P1 = (0,0) \text{ Máximo.}$$

6




~~[illegible]~~ Volumen del cubo: $V(x,y,z) = xyz$

Área superficial del cubo, es decir, ~~[illegible]~~ el área de las 6 caras del cubo:

$$A(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

$$\begin{cases} \text{Maximizar } f(x,y,z) = xyz \\ \text{sujeto a} \\ \qquad h(x,y,z) = 2(xy+xz+yz) - A_0 = 0 \end{cases}$$

donde $A_0 > 0$ es un dato ($m^2$ de material disponible).

$$\nabla f = (yz,\ xz,\ xy)$$

$$\nabla h = (2(y+z),\ 2(x+z),\ 2(x+y)) \leftarrow \lambda$$

---

$$\nabla f + \lambda \nabla h = (yz + 2\lambda(y+z),\ xz + 2\lambda(x+z),\ xy + 2\lambda(x+y))$$

Condición necesaria de optimalidad:

$$\left.\begin{aligned} yz + 2\lambda(y+z) &= 0 \\ xz + 2\lambda(x+z) &= 0 \\ xy + 2\lambda(x+y) &= 0 \\ xy + xz + yz &= \frac{A_0}{2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to xyz + 2\lambda(xy+xz) = 0 \\ &\to xyz + 2\lambda(xy+zy) = 0 \\ &\to xyz + 2\lambda(xz+yz) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda(xy + xz) = \lambda(xy + zy)$$

$$\lambda(xy + zy) = \lambda(xz + yz)$$

Posibles casos:

1º) $\lambda = 0 \longrightarrow yz = 0,\ xz = 0,\ xy = 0 \to x = 0$ ó $y = 0$ ó $z = 0$ NO.

2º) $\lambda \neq 0 \to \left.\begin{aligned} xz &= zy \\ xy &= xz \end{aligned}\right\} \begin{aligned} z(x-y) &= 0 \begin{cases} z = 0 \text{ NO} \\ x = y \end{cases} \\ x(y-z) &= 0 \begin{cases} x = 0 \text{ NO} \\ y = z. \end{cases} \end{aligned}$

Por tanto, $x = y = z$. Sustituyendo en la restricción:

$$3x^2 = \frac{A_0}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{A_0}{6}}$$

Solución: $\boxed{x = y = z = +\sqrt{\frac{A_0}{6}}}$

8

$P$ = precio

$A$ = publicidad

$EV$ = equipo de ventas

$$B(P, A, EV) = P\,Q(P, A, EV) - C_V^* \, Q(P, A, EV) - A - EV - C_F$$

$C_V^*$ = costes variables $\quad$ $Q(P, A, EV)$ = cantidad de ventas

$C_F$ = " fijos

Elasticidad de la demanda:

$$e_{Q,P} = \frac{\partial Q}{\partial P}\frac{P}{Q}, \quad e_{Q,A} = \frac{\partial Q}{\partial A}\frac{A}{Q}, \quad e_{Q,EV} = \frac{\partial Q}{\partial EV}\frac{EV}{Q}$$

{ Maximizar $B(P, A, EV)$

$$\nabla B = \left(\frac{\partial B}{\partial P}, \frac{\partial B}{\partial A}, \frac{\partial B}{\partial EV}\right)$$

$$= \left(Q + P\frac{\partial Q}{\partial P} - C_V^*\frac{\partial Q}{\partial P}, \; P\frac{\partial Q}{\partial A} - C_V^*\frac{\partial Q}{\partial A} - 1, \right.$$

$$\left. P\frac{\partial Q}{\partial EV} - C_V^*\frac{\partial Q}{\partial EV} - 1\right)$$

Condición necesaria de optimalidad: $\nabla B = 0$;

$$\left.\begin{array}{l} Q + P\dfrac{\partial Q}{\partial P} - C_V^* \dfrac{\partial Q}{\partial P} = 0 \\[2ex] P\dfrac{\partial Q}{\partial A} - C_V^* \dfrac{\partial Q}{\partial A} - 1 = 0 \\[2ex] P\dfrac{\partial Q}{\partial EV} - C_V^* \dfrac{\partial Q}{\partial EV} - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

1ª ecuación: $Q + (P - C_V^*)\dfrac{\partial Q}{\partial P} = 0$;

$$-\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{Q}{P - C_V^*} \rightarrow -\frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{Q}{P - C_V^*}$$

Por tanto: $\boxed{-e_{Q,P} = \dfrac{P}{P - C_V^*}}$

2ª ecuación: $P\dfrac{\partial Q}{\partial A} - C_V^* \dfrac{\partial Q}{\partial A} - 1 = 0$;

$$(P - C_V^*)\frac{\partial Q}{\partial A} = 1;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{1}{P - C_V^*};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A} \cdot \frac{A}{Q} = \frac{A}{Q} \cdot \frac{1}{P - C_V^*};$$

$$\boxed{\frac{PQ}{A} e_{Q,A} = \frac{PQ}{A} \cdot \frac{A}{Q} \frac{1}{P - C_V^*} = \frac{P}{P - C_V^*}}$$

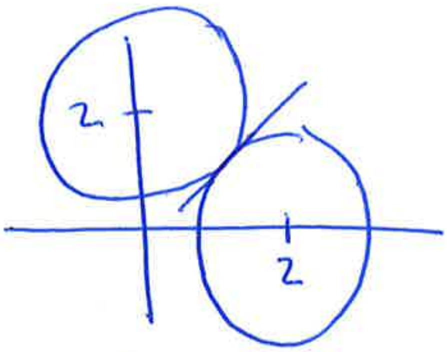
3ª ecuación: $P\frac{\partial Q}{\partial EV} - c_v^* \frac{\partial Q}{\partial EV} = 1$;

$$\frac{\partial Q}{\partial EV} = \frac{1}{P-c_v^*};$$

$$e_{Q,EV} = \frac{\partial Q}{\partial EV}\cdot\frac{EV}{Q} = \frac{EV}{Q}\cdot\frac{1}{P-c_v^*};$$

$$\boxed{\frac{PQ}{EV}\, e_{Q,EV} = \frac{P\cancel{Q}}{\cancel{EV}}\cdot\frac{\cancel{EV}}{\cancel{Q}}\cdot\frac{1}{P-c_v^*} = \frac{P}{P-c_v^*}}$$

12




Usamos la derivación implícita:

$(x-2)^2 + y(x)^2 = 2$;

$2(x-2) + 2y(x)y'(x) = 0$; $\quad x = y = 1$;

$2\cdot(1-2) + 2\cdot 1\, y'(1) = 0 \to \boxed{y'(1) = 1}$

$x^2 + (y-2)^2 = 2$;

$2x + 2(y(x)-2)\cdot y'(x) = 0$; $\quad x = y = 1$;

$2\cdot 1 + 2\cdot(1-2)\,y'(1) = 0 \to \boxed{y'(1) = 1}$

(13) $D(Q,P,R) = \log \frac{10Q}{P} + \frac{1}{100}R$

$Q = 10; \quad P = 2, \quad R = 200;$

$D(10,2,200) = \log \frac{100}{2} + \frac{200}{100} = \boxed{\log 50 + 2 = D^*}$

$D^* = \log \frac{10\cdot 10}{P} + \frac{R}{100}$

$\frac{\partial P}{\partial R} = ?$

$D^* = \log \frac{100}{P(R)} + \frac{R}{100};$

Derivando respecto a R:

$0 = \frac{1}{\frac{100}{P(R)}} \cdot -\frac{100}{P(R)^2} \cancel{+\frac{1}{100}} P'(R) + \frac{1}{100};$

$P(R) = 2; \quad 0 = \frac{1}{50} - 25P'(R) + \frac{1}{100};$

$\cancel{0} \; 25P'(R) = \frac{1}{50} + \frac{1}{100} \Rightarrow \boxed{P'(R) = \ldots}$

(14) $Q \equiv$ cantidad producida

$(x, y) \equiv$ materias primas

$$\log Q - \frac{x^2 y}{Q} + 1 = 0. \qquad Q, x, y > 0.$$

productividad marginal $\equiv \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{array} \right.$

$$x = y = 1 = Q.$$

$$\log\left(Q(x,y)\right) - \frac{x^2 y}{Q(x,y)} + 1 = 0$$

Derivando respecto a $x$:

$$\frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{2xy}{Q} + \frac{x^2 y}{Q^2} = 0;$$

$x = y = Q = 1$:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}(1,1) - \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{1} + \frac{1^2 \cdot 1}{1^2} = 0;$$

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x}(1,1) = 1}$$

Derivamos respecto a $y$:

$$\frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{x^2}{Q} + \frac{x^2 y}{Q^2} \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

Particularizamos en $x = y = Q = 1$:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{\partial Q(1,1)}{\partial y} - \frac{1^2}{1} + \frac{1^2 \cdot 1}{1^2} \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial Q}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2}}$$

15) a) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$ en el punto $(0,0)$.

Polinomio de Taylor de grado 2:

$f(0,0) = 0$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (\cos x \cos y, -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)$.

$\nabla f(0,0) = (1, 0)$

Cálculo de la matriz Hessiana: $x = y = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\operatorname{sen} x \cos y \longrightarrow 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos x \operatorname{sen} y \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\cos x \operatorname{sen} y \longrightarrow 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\operatorname{sen} x \cos y \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y) = 0 + \nabla f(0,0) \cdot (x,y)$$

$$= (1,0) \cdot (x,y) = x.$$